Corrigé - Série d'exercices : Fractions rationnelles

Exercice 1

1) Justifions que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$
$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

2) Déterminons les valeurs de x **pour lesquelles** A **existe**

$$A = \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+5)}$$

$$A = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)}$$

A existe si et seulement si $(x-2)(x+5) \neq 0$
$(x-2)(x+5) \neq 0$ équivaut à $x - 2 \neq 0$ et $x + 5 \neq 0$
$(x-2)(x+5) \neq 0$ équivaut à $x \neq 2$ et $x \neq -5$

Donc A existe si et seulement si $x \neq 2$ et $x \neq -5$.

3) Simplifions A

Pour $x \neq 2$ et $x \neq -5$:

$$A = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)}$$

$$A = \frac{x+2}{x+5}$$

4) Calculons la valeur numérique de A **pour** $x = 0$

Pour $x = 0$, $A = \dfrac{0+2}{0+5}$
$A = \dfrac{2}{5}$

Exercice 2

1) Justifions que $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2$$
$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

2) Déterminons les valeurs de x **pour lesquelles** B **existe**

$$B = \frac{(x-5)^2}{(x-5)(2x+1)}$$

B existe si et seulement si $(x-5)(2x+1) \neq 0$
$(x-5)(2x+1) \neq 0$ équivaut à $x - 5 \neq 0$ et $2x + 1 \neq 0$
$(x-5)(2x+1) \neq 0$ équivaut à $x \neq 5$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$

Donc B existe si et seulement si $x \neq 5$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

3) Simplifions B

Pour $x \neq 5$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$:

$$B = \frac{(x-5)(x-5)}{(x-5)(2x+1)}$$

$$B = \frac{x-5}{2x+1}$$

4) Calculons la valeur numérique de B **pour** $x = 2$

Pour $x = 2$, $B = \dfrac{2-5}{2 \times 2 + 1}$
$B = \dfrac{-3}{5}$

Exercice 3

1) Justifions que $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$$
$$4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles C existe

$$C = \frac{(2x-3)(x+1)}{(2x-3)(2x+3)}$$

C existe si et seulement si $(2x-3)(2x+3) \neq 0$
$(2x-3)(2x+3) \neq 0$ équivaut à $2x-3 \neq 0$ et $2x+3 \neq 0$
$(2x-3)(2x+3) \neq 0$ équivaut à $x \neq \frac{3}{2}$ et $x \neq -\frac{3}{2}$

Donc C existe si et seulement si $x \neq \frac{3}{2}$ et $x \neq -\frac{3}{2}$.

3) Simplifions C

Pour $x \neq \frac{3}{2}$ et $x \neq -\frac{3}{2}$:

$$C = \frac{(2x-3)(x+1)}{(2x-3)(2x+3)}$$

$$C = \frac{x+1}{2x+3}$$

4) Calculons la valeur numérique de C pour $x = -1$

Pour $x = -1$, $C = \frac{-1+1}{2(-1)+3}$
$C = \frac{0}{1}$
$C = 0$

Exercice 4

1) Factorisons $x^2 + 4x + 4$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles D existe

$$D = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(3x-1)}$$

D existe si et seulement si $(x+2)(3x-1) \neq 0$
$(x+2)(3x-1) \neq 0$ équivaut à $x+2 \neq 0$ et $3x-1 \neq 0$

$(x+2)(3x-1) \neq 0$ équivaut à $x \neq -2$ et $x \neq \dfrac{1}{3}$

Donc D existe si et seulement si $x \neq -2$ et $x \neq \dfrac{1}{3}$.

3) Simplifions D

Pour $x \neq -2$ et $x \neq \dfrac{1}{3}$:

$$D = \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(3x-1)}$$

$$D = \frac{x+2}{3x-1}$$

4) Calculons la valeur numérique de D pour $x = 1$

Pour $x = 1$, $D = \dfrac{1+2}{3(1)-1}$

$D = \dfrac{3}{2}$

Exercice 5

1) Justifions que $9x^2 - 1 = (3x-1)(3x+1)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2$$

$$9x^2 - 1 = (3x-1)(3x+1)$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles E existe

$$E = \frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

E existe si et seulement si $(3x-1)(x+4) \neq 0$
$(3x-1)(x+4) \neq 0$ équivaut à $3x - 1 \neq 0$ et $x + 4 \neq 0$
$(3x-1)(x+4) \neq 0$ équivaut à $x \neq \dfrac{1}{3}$ et $x \neq -4$

Donc E existe si et seulement si $x \neq \dfrac{1}{3}$ et $x \neq -4$.

3) Simplifions E

Pour $x \neq \dfrac{1}{3}$ et $x \neq -4$:

$$E = \frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

$$E = \frac{3x+1}{x+4}$$

4) Calculons la valeur numérique de E pour $x = -\frac{1}{2}$

Pour $x = -\frac{1}{2}$, $E = \dfrac{3\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{-\frac{1}{2}+4}$

$E = \dfrac{-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}}$

$E = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}$

$E = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$

$E = -\frac{1}{7}$

Exercice 6

1) Justifions que $x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2$$
$$x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles F existe

$$F = \frac{(x-7)(2x+5)}{(x-7)(x+7)}$$

F existe si et seulement si $(x-7)(x+7) \neq 0$
$(x-7)(x+7) \neq 0$ équivaut à $x - 7 \neq 0$ et $x + 7 \neq 0$
$(x-7)(x+7) \neq 0$ équivaut à $x \neq 7$ et $x \neq -7$

Donc F existe si et seulement si $x \neq 7$ et $x \neq -7$.

3) Simplifions F

Pour $x \neq 7$ et $x \neq -7$:

$$F = \frac{(x-7)(2x+5)}{(x-7)(x+7)}$$

$$F = \frac{2x+5}{x+7}$$

4) Calculons la valeur numérique de F pour $x = 0$

Pour $x = 0$, $F = \dfrac{2(0)+5}{0+7}$
$F = \dfrac{5}{7}$

Exercice 7

1) Factorisons le numérateur de G

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles G existe

$$G = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)}$$

G existe si et seulement si $(x+1)(x-3) \neq 0$
$(x+1)(x-3) \neq 0$ équivaut à $x+1 \neq 0$ et $x-3 \neq 0$
$(x+1)(x-3) \neq 0$ équivaut à $x \neq -1$ et $x \neq 3$

Donc G existe si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 3$.

3) Simplifions G

Pour $x \neq -1$ et $x \neq 3$:

$$G = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$G = \frac{x+1}{x-3}$$

4) Calculons la valeur numérique de G pour $x = 2$

Pour $x = 2$, $G = \dfrac{2+1}{2-3} = \dfrac{3}{-1}$
$G = -3$

Exercice 8

1) Justifions que $16 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$16 - x^2 = 4^2 - x^2$$
$$16 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles H existe

$$H = \frac{(4 - x)(4 + x)}{(4 - x)(2x + 3)}$$

H existe si et seulement si $(4 - x)(2x + 3) \neq 0$
$(4 - x)(2x + 3) \neq 0$ équivaut à $4 - x \neq 0$ et $2x + 3 \neq 0$
$(4 - x)(2x + 3) \neq 0$ équivaut à $x \neq 4$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$

Donc H existe si et seulement si $x \neq 4$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

3) Simplifions H

Pour $x \neq 4$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$:

$$H = \frac{(4 - x)(4 + x)}{(4 - x)(2x + 3)}$$

$$H = \frac{4 + x}{2x + 3}$$

4) Calculons la valeur numérique de H pour $x = -4$

Pour $x = -4$, $H = \dfrac{4 + (-4)}{2(-4) + 3} = \dfrac{0}{-5}$
$H = 0$

Exercice 9

1) Factorisons $x^2 - 6x + 9$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$$
$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles I existe

$$I = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+2)}$$

I existe si et seulement si $(x-3)(x+2) \neq 0$
$(x-3)(x+2) \neq 0$ équivaut à $x-3 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$
$(x-3)(x+2) \neq 0$ équivaut à $x \neq 3$ et $x \neq -2$

Donc I existe si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq -2$.

3) Simplifions I

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -2$:

$$I = \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$I = \frac{x-3}{x+2}$$

4) Calculons la valeur numérique de I pour $x = 1$

Pour $x = 1$, $I = \dfrac{1-3}{1+2}$
$I = -\dfrac{2}{3}$

Exercice 10

1) Justifions que $25x^2 - 4 = (5x-2)(5x+2)$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$25x^2 - 4 = (5x)^2 - 2^2$$
$$25x^2 - 4 = (5x-2)(5x+2)$$

2) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles J existe

$$J = \frac{(5x-2)(x+3)}{(5x-2)(5x+2)}$$

J existe si et seulement si $(5x-2)(5x+2) \neq 0$
$(5x-2)(5x+2) \neq 0$ équivaut à $5x-2 \neq 0$ et $5x+2 \neq 0$
$(5x-2)(5x+2) \neq 0$ équivaut à $x \neq \dfrac{2}{5}$ et $x \neq -\dfrac{2}{5}$

Donc J existe si et seulement si $x \neq \dfrac{2}{5}$ et $x \neq -\dfrac{2}{5}$.

3) Simplifions J

Pour $x \neq \frac{2}{5}$ et $x \neq -\frac{2}{5}$:

$$J = \frac{(5x-2)(x+3)}{(5x-2)(5x+2)}$$

$$J = \frac{x+3}{5x+2}$$

4) Calculons la valeur numérique de J pour $x = -3$

Pour $x = -3$, $J = \frac{-3+3}{5(-3)+2} = \frac{0}{-13}$
$J = 0$