Leçon 3 : Nombres rationnels

1) PPCM de deux nombres entiers naturels

a) Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Le **Plus Petit Commun Multiple** de a et b, noté PPCM$(a; b)$, est le plus petit nombre entier naturel non nul qui est à la fois multiple de a et de b.

b) Méthode

1. Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.
2. Écrire le produit de tous les facteurs premiers apparus dans les deux décompositions, chaque facteur étant pris une seule fois et affecté de son plus grand exposant.

Exemple

$10 = 2 \times 5 \quad \text{et} \quad 15 = 3 \times 5$

$\text{PPCM}(10; 15) = 2 \times 3 \times 5 = 30$

2) PGCD de deux nombres entiers naturels

a) Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls. Le **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b, noté PGCD$(a; b)$, est le plus grand nombre entier naturel qui divise à la fois a et b.

b) Méthode

1. Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.
2. Écrire le produit de tous les facteurs premiers communs à ces deux nombres, affectés de leur plus petit exposant.

Exemple

$18 = 2 \times 3^2 \quad \text{et} \quad 12 = 2^2 \times 3$

$\text{PGCD}(18; 12) = 2 \times 3 = 6$

3) Nombres rationnels

a) Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre égal à une fraction ou à l'opposé d'une fraction.

$$\frac{a}{b} \quad \text{où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0.$$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

$$0;\ -7;\ 13{,}86;\ -0{,}4;\ \frac{7}{2};\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{3};\ 5 \quad \text{sont des nombres rationnels.}$$

Remarques

- Le dénominateur d'un nombre rationnel est différent de zéro.
- Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel.

  On a :

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

b) Écriture des nombres rationnels

Propriétés

- a et b étant des nombres entiers naturels et b non nul :

  $$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

- Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme : $\frac{c}{d}$ où c et d sont des nombres entiers relatifs et d non nul.

Exemples

$$-\frac{11}{5} = \frac{11}{-5} = -\frac{11}{5} \quad ; \quad \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

4) Opérations sur les nombres rationnels

a) Somme et différence de deux nombres rationnels

Règle

Pour calculer la somme (ou la différence de deux nombres rationnels écrits sous forme de fraction ou d'opposés de fractions :

- on les réduit à un même dénominateur positif ;
- on calcule la somme (ou la différence) des numérateurs des quotients obtenus.

Exemples :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{11}\right)+\left(-\frac{5}{11}\right) &= \frac{-3}{11}+\frac{-5}{11}\\ &= \frac{(-3)+(-5)}{11}\\ &= \frac{-8}{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{11}\right)+\frac{1}{2} &= \frac{-3}{11}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{(-3)\times 2+11\times 1}{11\times 2}\\ &= \frac{-6+11}{22}\\ &= \frac{5}{22}\end{aligned}$$

b) Produit de deux nombres rationnels

Propriété

a, b, c, et d sont des nombres entiers relatifs ; b et d sont non nuls.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple

$$-\frac{9}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{-9\times 4}{5\times 7}=-\frac{36}{35}$$

c) Puissance entière d'un nombre rationnel

Propriété

a et b sont deux nombres entiers relatifs tels que b est non nul. n est un nombre entier naturel non nul.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{2}\right)^4 &= \frac{(-3)^4}{2^4} \\ &= \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{2\times 2\times 2\times 2} \\ &= \frac{81}{16}\end{aligned}$$

d)Inverse d'un nombre rationnel

Définition

a et b sont des nombres entiers relatifs non nuls. On a :

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} = 1$$

On dit que l'inverse du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Exemples

$\frac{1}{5}$ est l'inverse de 5.

-13 est l'inverse de $-\frac{1}{13}$

1 est l'inverse de 1

$\frac{5}{7}$ est l'inverse de $\frac{7}{5}$

$-\frac{4}{17}$ est l'inverse de $-\frac{17}{4}$

-1 est l'inverse de -1

e) Quotient de deux nombres rationnels

Définition

p et q sont deux nombres rationnels et q non nul.

Effectuer le quotient de p par q, c'est diviser p par q.

Règle :

Soient a, b, c et d des nombres entiers relatifs, non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On peut écrire aussi :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple

$$\begin{aligned} -\frac{9}{5} \div \frac{2}{7} &= -\frac{9}{5} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{-9 \times 7}{5 \times 2} \\ &= -\frac{63}{10} \end{aligned}$$

5) Troncature – Approximation décimale – Arrondi

Exemple

On a :

$$\frac{50}{13} \approx 3{,}84615$$

a) Troncature

- La **troncature** d'ordre 0 (ou à zéro décimale) de $\frac{50}{13}$ est 3.
- La **troncature** d'ordre 1 (ou à une décimale) de $\frac{50}{13}$ est 3,8.
- La **troncature** d'ordre 2 (ou à deux décimales) de $\frac{50}{13}$ est 3,84.
- ...

b) Encadrement et approximations décimales

- L'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 0 de $\frac{50}{13}$ est : $3 < \frac{50}{13} < 4$.Donc :
  - l'approximation décimale d'ordre 0 par défaut de $\frac{50}{13}$ est 3
  - l'approximation décimale d'ordre 0 par excès de $\frac{50}{13}$ est 4
- L'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 de $\frac{50}{13}$ est : $3{,}8 < \frac{50}{13} < 3{,}9$.Donc :
  - l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de $\frac{50}{13}$ est 3,8
  - l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de $\frac{50}{13}$ est 3,9
- L'encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 de $\frac{50}{13}$ est : $3{,}84 < \frac{50}{13} < 3{,}85$.Donc :
  - l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $\frac{50}{13}$ est 3,84
  - l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de $\frac{50}{13}$ est 3,85

c) Arrondi

- L' **arrondi** d'ordre 0 de $\frac{50}{13}$ est 4 car le premier chiffre après la virgule est 8.
- L' **arrodi** d'ordre 1 de $\frac{50}{13}$ est 3,8 car le deuxième chiffre après la vigule est 4.
- L' **arrondi** d'ordre 2 de $\frac{50}{13}$ est 3,85 car le troisième chiffre après la virgule est 6.
- ...