

Leçon 1 : Nombres premiers

1) Puissance entière d'un nombre entier naturel

a) Définition

a un nombre entier naturel et n un nombre entier naturel plus grand que 1.

a^n est le produit n facteurs égaux au nombre a .

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

On dit que :

- a^n est une puissance du nombre a ;
- n est l'exposant de cette puissance ;
- a^n se lit : a exposant n .

Exemple :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 32$$

Remarques :

- $a^1 = a$;
- Pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$;
- a^n se lit : a exposant n .

b) Propriétés

a et b sont des nombres entiers naturels. m et n sont des nombres entiers naturels non nuls :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemples :

$$\begin{aligned} 6^4 \times 6^7 &= 6^{4+7} \\ &= 6^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^3 \times 5^3 &= (2 \times 5)^3 \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

c) Règles de priorité

Dans une suite d'opérations :

- on effectue d'abord les opérations entre parenthèses ;
- puis les puissances ;
- ensuite les multiplications et divisions ;
- enfin les additions et soustractions.

Exemples :

$$\begin{aligned}5 + 2 \times 4^2 &= 5 + 2 \times 4 \times 4 \\&= 5 + 2 \times 16 \\&= 5 + 32 \\&= 37\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 3^2 - 8 &= 2 \times 3 \times 3 - 8 \\&= 2 \times 9 - 8 \\&= 18 - 8 \\&= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5 + 2) + 4^2 &= 7 + 4^2 \\&= 7 + 4 \times 4 \\&= 7 + 16 \\&= 23\end{aligned}$$

2) Divisions dans $\mathbb{N}$

a) Définitions

a et b sont des nombres entiers avec $b \neq 0$. Diviser a par b , c'est déterminer deux nombres entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

On appelle :

- a le dividende ;
- b le diviseur ;
- q le quotient ;
- r le reste.

Exemple :

$$56 = 10 \times 5 + 6$$

$6 < 10$, donc l'égalité précédente traduit la division de 56 par 10.

$6 > 5$, donc l'égalité précédente ne traduit pas la division de 56 par 5.

b) Propriétés

- a est un multiple de b si le reste de la division de a par b est nul.
- Si a n'est pas un multiple de b , alors a est compris entre deux multiples consécutifs de b .

3) Nombres premiers

a) Définition

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... sont des nombres premiers ;
- 1, 4, 6, 8 et 9 ne sont pas des nombres premiers.

b) Décomposition d'un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre entier naturel plus grand que 1 qui n'est pas premier admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple : Décomposition de 60 en facteurs premiers

60		2
30		2
15		3
5		5
1		

Ainsi :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$